# Rekenen met machtsfuncties en logaritmen

In deze les komen voor studenten met Wiskunde A onderwerpen aan bod die doorgaans nieuw zijn. Voor studenten met Wiskunde B is in ieder geval een deel van de lesstof niet nieuw. Let wel goed op het onderdeel over **natuurlijke logaritmen** en **e-machten**. Dit wordt behandeld in paragraaf 1.3. Dit wordt namelijk ook bij Wiskunde B op de HAVO NIET behandeld. Met behulp van de diagnostische toets kun je checken welke onderdelen je al voldoende beheerst. Als je al zeker weet dat dit nieuw voor je is, dan kun je de diagnostische toets ook doen na het doornemen van deze les, om te checken of je voldoende kennis hebt of bepaalde onderdelen nog meer moet oefenen.

## 1.1 Machtsfuncties

In les 2 zijn machten en wortels behandeld. Hierbij ging het telkens om machten waarbij het exponent bekend was en het grondtal . Bijvoorbeeld: , , of .

Machten kunnen ook andersom voorkomen: het grondtal is bekend en de exponent onbekend. Bijvoorbeeld: .

Machtsfuncties in een grafiek zien er als volgt uit:

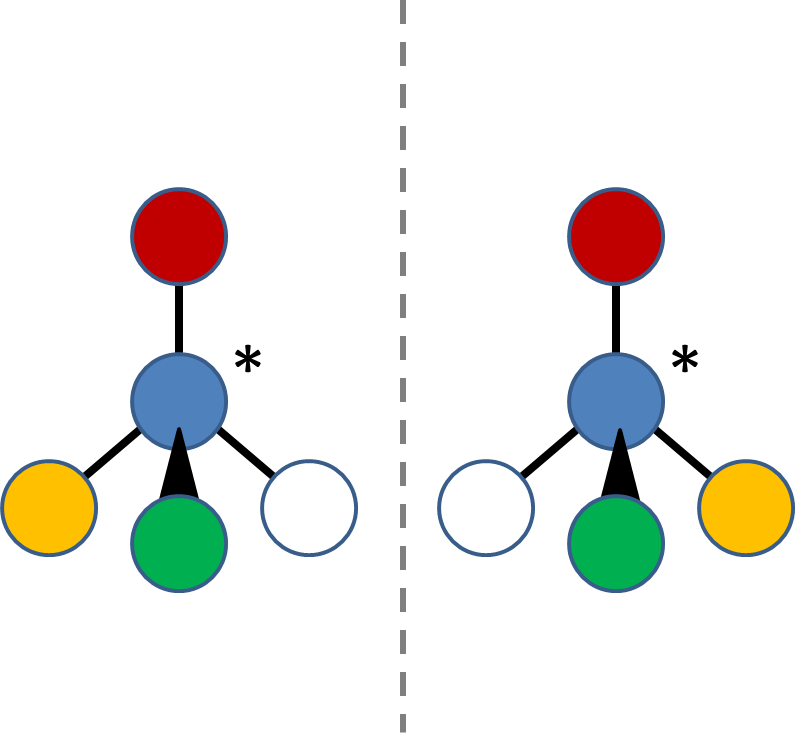
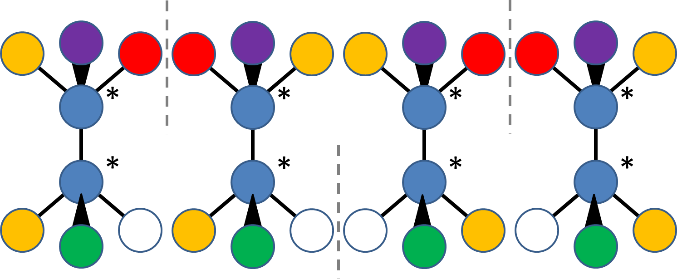
Wanneer het grondtal groter is dan neemt bij toenemende waarden van steeds sterker toe. De lijn zal dus steeds steiler worden. Er is sprake van een **exponentieel verband** tussen en .

Wanneer het grondtal kleiner is dan dan ziet de grafiek eruit zoals hieronder is te zien:

Machtsfuncties komen binnen de opleidingen van ILST regelmatig terug. Een aantal voorbeelden:

**Voorbeeld 1: optische isomeren**

, bijv. aantal optische isomeren van moleculen met chirale C-atomen. Voor elke chiraal C-atoom zijn er twee mogelijkheden, dus verdubbelt het aantal isomeren:

\*

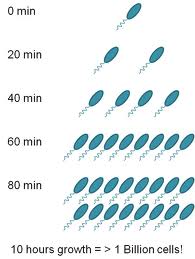
\*

chiraal C-atoom: isomeren chirale C-atomen: isomeren

Dus aantal isomeren voor chirale atomen is .

**Voorbeeld 2: bacteriegroei**

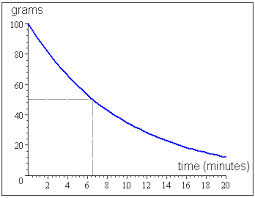
, bijv. is aantal verdubbelingen (= celdelingen). Per deling meer bacteriën: dus aantal is met het aantal bacteriën waar je mee start.



**Voorbeeld 3: radioactief verval**

 , bijv. concentratieverloop van een eerste order reactie

in de tijd: , bijv. radioactief verval van uranium:



## 1.2 Logaritmen

Om een kwadraat weg te werken trek je de wortel. Worteltrekken is dus het omgekeerde van kwadrateren. Dit wordt wel de **inverse functie** genoemd. Met exponentiële functies is de oplossing niet te verkrijgen met behulp van worteltrekken, maar door middel van **logaritmen**. Ter vergelijking:

Van een macht naar een wortel:

Van een macht naar een logaritme:

Dus algemeen:

Dus: worteltrekken is de inverse (= omgekeerde) functie van kwadrateren en het logaritme is de inverse functie van een macht. Een overzicht van alle inverse functies tot nu toe:

|  |  |
| --- | --- |
| Functie | Inverse functie |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Voorbeelden**

want

want

want

**Oefeningen**

**Oefening 1.1**

Zet de volgende vergelijkingen om in een logaritme of een wortel:

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

**e.**

**Oefening 1.2**

Bereken de volgende logaritmen zonder rekenmachine. Tip: schrijf eerst om tot een macht. Bijvoorbeeld , want **.**

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

**e.**

**f.**

## 1.3 Veelvoorkomende grondtallen: 10 en e

Een veelvoorkomend grondtal bij logaritmen is , dus de . Als er geen grondtal is aangegeven, wordt het grondtal bedoeld! Naast 10-logaritmen zijn er veel verbanden waarbij het grondtal is; staat voor het getal van Euler:

Het **natuurlijk logaritme** heeft als grondtal ***e*** (het **getal van Euler**). Dit logaritme wordt in Europa niet geschreven als , maar in plaats daarvan als …. Dus :

***Logaritmen op de rekenmachine en computersoftware***

Net als wortels zijn logaritmen in getallen te berekenen met behulp van de rekenmachine. Bijvoorbeeld:

Hiervoor is het knopje LOG op de rekenmachine. Met dit knopje kunnen alleen 10log waarden berekend worden. In deze les wordt onder andere behandeld hoe log-waarden met een ander grondtal dan omgerekend kunnen worden naar een logaritme met een grondtal van .

Daarnaast hebben rekenmachines doorgaans ook een knopje LN waarmee het natuurlijk logaritme berekend kan worden. Op het tentamen mag de rekenmachine niet gebruikt worden. Daar laat je het logaritme (net als wortels) zo vereenvoudigd mogelijk staan.

Nog even ter herinnering:

* Iets tot de macht is altijd , dus ongeacht het grondtal is de log-waarde van altijd 0:

Dus: ⬄

1. Een grondtal tot de macht is altijd het grondtal dus, dus ongeacht het grondtal geldt:

⬄

en ⬄

Let bij computer software op wat de functie log( ) betekent: bij het ene pakket betekent het ln( ) en bij het andere pakket betekent het 10log( ). Zie onderstaande tabel:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Software** |  |  |  |  |
| Mathcad | log(x) | ln(x) | log(x, 2) | exp(x) |
| Mathematica | Log[x, 10] | Log[x] | Log[x, 2] | Exp[x] |
| R | log10(x) | log(x) | log2(x) | exp(x) |
| Excel | log10(x) | ln(x) | log(x, 2) | exp(x) |
| Python | log10(x) | log(x) | log(x, 2) | exp(x) |

## 1.4 Rekenregels met logaritmen

Voor logaritmen gelden een aantal rekenregels:

1. (mits en beiden groter dan zijn)

Dus als er binnen een logaritme twee componenten met elkaar vermenigvuldigd worden, kunnen deze opgesplitst worden in twee logaritmen die bij elkaar opgeteld worden.

**Voorbeeld:**

2. (mits en beiden groter dan zijn)

Dus als er binnen een logaritme twee componenten door elkaar gedeeld worden, dan kunnen deze opgesplitst worden in twee logaritmen die van elkaar afgetrokken worden.

**Voorbeeld:**

3. (mits groter dan is)

**Voorbeeld**:

4. (mits is en niet )

Deze rekenregel is heel belangrijk om logaritmen met een grondtal anders dan om te zetten in een of een , zodat je deze bijvoorbeeld met de rekenmachine uit kunt rekenen.

**Voorbeeld:**

Deze rekenregels staan ook op het formuleblad.

**Oefening 1.3**

Vereenvoudig de volgende uitdrukkingen, bijv. ;

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

**e.**

**f.**

**g.**

**h.**

**Oefening 1.4**

Schrijf als één logaritme, bijv.:

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

# 2. vergelijkingen met logaritmen

In les 6 zijn exponentiele functies en logaritmen behandeld. In deze les wordt besproken hoe logaritmen in vergelijkingen gebruikt worden en hoe je zulke vergelijkingen kunt oplossen. Mocht je de logaritmen al goed beheersen, dan kun je met behulp van de diagnostische toets checken of je de stof voldoende beheerst.

## 2.1 logaritmen en machten in vergelijkingen

Logaritmen en e-machten kunnen ook voorkomen in vergelijkingen. Deze vergelijkingen zijn vaak vrij lastig op te lossen. Het volgende stappenplan werkt (bijna) altijd:

1. Werk waar mogelijk alle e-machten (of -machten) of logaritmen naar één kant van de vergelijking.
2. Schrijf de e-machten of logaritmen met behulp van de rekenregels als één e-macht of logaritme.
3. Pas de inverse functie van de e-macht (dat is een logaritme) of de inverse functie van een logaritme (dat is een e-macht) toe aan beide kanten van de vergelijking.
4. Los de resulterende vergelijking (1e, 2e graads of vergelijking met een breuk) verder op volgens de gebruikelijke manier.

**Voorbeeld 1**

Los exact op uit de vergelijking:

**Stap 1:** de e-macht staat al aan één kant, dus stap is hier niet nodig.

**Stap 2:** Er is maar één macht, dus stap 2 is hier niet nodig.

**Stap 3:** het toepassen van de inverse functie is wel van toepassing. De inverse functie van een e-macht is ln, dus:

(beide kanten ln)

Dit kunnen we zoals hierboven geoefend verder vereenvoudigen:

**Stap 4:** Nu kunnen we alles behalve naar één kant brengen en al het andere naar de andere kant:

(beide kanten )

(beide kanten delen door )

**Voorbeeld 2**

Los exact op uit de vergelijking:

**Stap 1:** in het linkerlid en het rechterlid staan e-machten. Deze moeten naar één kant gebracht worden. Als je de vergelijking bekijkt staat er in versimpelde vorm:

Wanneer er gedeeld wordt door zullen beide e-machten beiden in het linkerlid zitten:

(beide kanten : )

**Stap 2:** Er staan nu twee e-machten in het linkerlid. Deze moeten samengevoegd worden. Dit kan als volgt:

Dus:

**Stap 3:** Nu moet de inverse functie van de e–macht genomen worden dus:

(beide kanten ln)

**Stap 4:** Vervolgens kan deze vergelijking verder uitgewerkt worden:

(

(

(wegwerken van de haakjes)

(beide kanten +6)

(beide kanten delen door 2)

In sommige vergelijkingen staat aan beide kanten exact dezelfde functie. Bijvoorbeeld:

Deze vergelijkingen zijn op te lossen door aan beide kanten de inverse functie te nemen:

(beide kanten e tot de macht)

**Voorbeeld**:

(beide kanten ln)

## 2.2 Logaritmische vergelijkingen bij ILST:

Binnen de opleidingen van ILST komen vergelijkingen met logaritmen regelmatig voor. Bijvoorbeeld bij pH-berekeningen en spectrofotometrische bepalingen.

**Voorbeeld:**

Bij spectrofotometrische bepalingen wordt met behulp van licht de concentratie van een stof gemeten. Licht van een bepaalde golflengte wordt op een oplossing geschenen. Hoe groter de concentratie van de stof, des te meer van het licht geabsorbeerd wordt door de oplossing. De hoeveelheid licht wordt daarom gemeten vóór absorptie () en ná de absorptie (). Hieruit kan de extinctie () berekend worden:

Druk deze vergelijking uit in .

**Stap 1:** het min-teken voor de log kan naar het andere lid gebracht worden door beide kanten van de vergelijking te vermenigvuldigen met :

**Stap 2:** het logaritme weg te werken moet de inverse functie van de log worden gedaan. Aangezien er geen grondtal staat, zal het grondtal zijn. De inverse functie van de 10log is ’ tot de macht’:

Nu is de logfunctie dus weggewerkt.

**Stap 3:** het enige dat nu nog moet gebeuren is de breuk wegwerken. Dit kan door beide kanten van de vergelijking te vermenigvuldigen met :

**Oefening 2.1**

Los de volgende vergelijkingen op zonder rekenmachine:

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

**e.**

**f.**

**Oefening 2.2**

Los exact op uit de vergelijkingen:

**a.**

**b.**

**c.**

**d.**

**e.**

**f.**

**g.**

**h.**

**i.**

**j.**

**k.**

**l.**

**Uitwerkingen opgaven Hoofdstuk 1**

**Oefening 1.1**



**Oefening 1.2**

**Oefening 1.3**

**Oefening 1.4**

**Uitwerkingen opgaven Hoofdstuk 2**

**Oefening 2.1**

**Oefening 2.2**